



بررسی تاثیر تابش لیزر بر یک صفحه دوبعدی با استفاده از تئوری ساختار

مهدیه زین الدینی^۱، داود طغرای^{۲*}، احمدرضا عظیمیان^۳

* نویسنده مسئول: toghraee@iaukhsh.ac.ir

واژه‌های کلیدی

تئوری ساختار، انتقال حرارت غیر فوریه ای،
تابش لیزر

چکیده

در این مقاله تاثیر تابش لیزر بر یک صفحه دوبعدی با خواص فیزیکی و گرمایی ثابت با استفاده از تئوری ساختار ارائه می‌شود. در تئوری ساختار مسئله اصلی به سه مسئله ساده تر تبدیل شده که هر کدام دارای یک جمله غیرهمگن است. این جملات عبارتند از شرایط اولیه، شرایط مرزی و تولید انرژی که در هر مسئله مقادیر مختلفی را دارا هستند. در این مقاله معادله انتقال حرارت غیرفوریه‌ای برای یک صفحه با دمای اولیه $\phi(x, y)$ ، در حالتی که دمای چهار طرف آن صفر در نظر گرفته شده، مورد استفاده قرار گرفته است. صفحه از سمت چپ تحت تابش لیزر قرار دارد. همانطور که در شکل‌ها نشان داده شده، حداکثر دمای بدست آمده توسط مدل فوریه‌ای از مدل غیرفوریه‌ای بیشتر است و در تئوری‌های غیرفوریه‌ای انتشار حرارت به صورت موجی شکل است و در واقع شار حرارتی با تأخیر فاز با گرادیان دما مرتبط است. با جایگذاری حل‌های به دست آمده در معادلات حاکم به سادگی صحت حل‌های به دست آمده را می‌توان بررسی کرد.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد واحد خمینی شهر

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد واحد خمینی شهر

۳- استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد واحد خمینی شهر

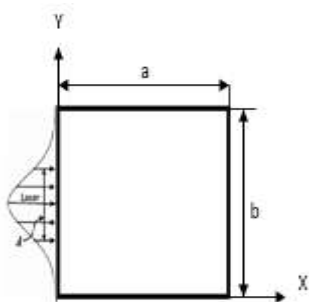
۱- مقدمه

برای تعیین نفوذ حرارتی در مواد مختلف از قانون فوریه استفاده می‌شود که در آن فرض می‌شود هر اغتشاش دمایی یا موج گرمایی در ماده با سرعت بینهایت پخش می‌شود. این فرض از نظر فیزیکی منطقی به نظر نمی‌رسد، زیرا برای برقراری هر حالت تعادل جدید در پدیده‌های ترمودینامیکی به زمان نیاز است. شرایط پیچیده بیولوژیکی بافت و نیاز به کنترل دما برای بهبود کیفیت درمان، محققین را بر آن داشت که به بررسی بیشتر انتشار حرارت در این محیط پویا بپردازند. در هنگام به کارگیری پرتوهای لیزر توان بالا و همچنین در مطالعه انتقال حرارت در بازه‌های زمانی بسیار بسیار کوتاه، سرعت انتشار موج گرمایی برخلاف فرض قانون فوریه محدود است. اولین بار کاتانو و ورنوت [۱] مدل اصلاح شده‌ای از انتقال حرارت به نام مدل هدایت هذلولوی را ارائه دادند، که در آن یک ثابت تأخیر زمانی برای شار حرارت در نظر گرفته شده بود. اگر در محاسبات مربوط به فرآیند انتقال حرارت که در زمان‌های کمتر از زمان تأخیر یا محیط اتفاق بیفتد، از مدل فوریه استفاده شود می‌تواند منجر به نتایج نادرست شود. افزایش دمای ناحیه تحت تابش لیزر در تومورهای مختلف دارای اهمیت است، لذا دانستن پروفیل دقیق دما برحسب زمان در اثر تابش لیزر در نقاط مختلف بافت‌های بدن از جمله تومورها دارای اهمیت زیاد است [۲]. در طول پنجاه سال اخیر تحقیقات زیادی در رابطه با تصحیح هدایت فوریه در مواد و فرایندهای مختلف صورت گرفته است. لواندسکا^۴ [۳] معادله انتقال حرارت هذلولوی و سهموی را برای یک جسم نیمه بینهایت که تحت یک منبع تابشی لیزر که با زمان تغییر می‌کند بررسی کرد. وی برای تحلیل یک بعدی یک صفحه نیمه بینهایت با مرزهای عایق از روش تبدیل لاپلاس استفاده

کرد. سعدالدین و همکاران [۴]، با استفاده از مدل کاتانو و ورنوت و روش حل عددی دمای قطعه‌ای که تحت عملیات ماشینکاری با استفاده از تخلیه الکتریکی قرار داشت را بدست آوردند و نمودارهای دمایی را برای چند عدد ورنوت و فوریه رسم کردند و مشاهده کردند هر چه عدد ورنوت بیشتر باشد زمان مورد نیاز برای رسیدن دمای قطعه به حالت دائم بیشتر خواهد بود و با افزایش عدد ورنوت حداکثر و حداقل دمای قطعه، به ترتیب بیشتر و کمتر می‌شوند. عاطفی و طلالی [۵]، انتقال حرارت غیر فوریه‌ای در یک استوانه تو خالی همگن را از روش جداسازی متغیرها مطالعه و رفتار پروفیل‌های غیرفوریه‌ای را برای حالت شار ثابت و پالسی بر روی استوانه بررسی کردند. در مطالعه حاضر تاثیر تابش لیزر بر یک صفحه دوبعدی، که از سمت چپ تحت تابش قرار دارد با استفاده از تئوری ساختار مورد مطالعه قرار گرفته است و میدان‌های دمای دو مدل فوریه‌ای و غیرفوریه‌ای با یکدیگر مقایسه شده اند.

۲- معادلات حاکم

در این مقاله تاثیر تابش لیزر بر صفحه دوبعدی با خواص فیزیکی و گرمایی ثابت $0 \leq x \leq a$ و $0 \leq y \leq b$ با دمای اولیه $T(x, y, 0) = \phi(x, y)$ و شرایط مرزی مستقل از زمان، با استفاده از تئوری ساختار بررسی می‌گردد. شماتیک مسئله در شکل (۱) نشان داده شده است،



شکل (۱) شماتیک یک صفحه دوبعدی که تحت تابش لیزر

قرار دارد

⁴ - Lewandowska

انرژی سیستم فرم کلی معادل انتقال حرارت فوریه‌ای دوبعدی با در نظر گرفتن منبع حرارتی (f) به صورت زیر بدست می‌آید،

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, t) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (۷)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (۸)$$

صفحه از سمت چپ تحت تابش لیزر [۶] قرار دارد،

$$f(x, y, t) = \frac{\alpha}{k} g(x, y, t) \quad (۹)$$

$$f(x, y, t) = \frac{\alpha g_0}{k} \cdot e^{-\mu x - 8y^2/d^2} \cdot (e^{-\beta t} - e^{-\delta t}) \quad (۱۰)$$

۲-۲ مدل انتقال حرارت غیرفوریه‌ای (CV)

رابطه ارائه شده توسط کاتانو و ورنوت که به مدل انتقال حرارت CV معروف است به صورت زیر است،

$$q(r, t) + \tau_q \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} = -k \nabla T(r, t) \quad (۱۱)$$

با اعمال عملگر دیورژانس در دو طرف معادله بالا و جایگزین کردن معادله انرژی، معادله هدایت حرارتی غیرفوریه‌ای در حالت دوبعدی در مختصات کارتزین، با در نظر گرفتن منبع حرارتی به صورت زیر بدست می‌آید،

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + f(x, y, t) \quad (۱۲)$$

$$\alpha \left[\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + f(x, y, t)$$

$$f(x, y, t) = \frac{\alpha}{k} \left(g + \tau_q \frac{\partial g}{\partial t} \right) \quad (۱۳)$$

شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند، برای سادگی و کاهش پیچیدگی معادلات، دمای محیط صفر در نظر گرفته شده است.

$$T(0, y, t) = T(a, y, t) = 0 \quad (۱)$$

$$T(x, 0, t) = T(x, b, t) = 0 \quad (۲)$$

$$T(x, y, 0) = \varphi(x, y) = 300K \quad (۳)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad (۴)$$

۱-۲ مدل انتقال حرارت فوریه‌ای

تئوری کلاسیک انتقال حرارت هدایتی بر پایه قانون فوریه بنا شده است. این قانون در سال ۱۸۰۷ توسط فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی جوزف فوریه^۵ بر اساس تجربه و آزمایش به صورت زیر پیشنهاد شد [۱]،

$$q''(r, t) = -k \vec{\nabla} T(r, t) \quad (۵)$$

بر مبنای این قانون شار حرارتی q'' با گرادیان دما رابطه خطی دارد. در مختصات کارتزین این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$q''(x, y, z, t) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \right) \quad (۶)$$

در معادله (۵)، $\vec{r}$ مکان یک نقطه از جسم، t زمان، T دما و $\vec{\nabla}$ عملگر گرادیان می‌باشد k هم ضریب هدایت گرمایی ماده است که تابع دو خاصیت شدتی و مستقل ماده (عموماً دما و فشار) است و براساس قانون دوم ترمودینامیک دارای مقدار مثبتی است [۱]. هر چه مقدار عددی ضریب هدایت گرمایی جسم بزرگتر باشد، جسم هادی تر بوده و مقدار حرارت بیشتری از آن عبور می‌کند و برعکس هرچه مقدار عددی ضریب هدایت گرمایی جسم کوچکتر باشد، جسم عایق تر است. با جانشین کردن رابطه (۵) در معادله

^۵-Joseph Fourier

۳- تئوری ساختار

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T_2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2(x, y, t)}{\partial y^2} \right] \quad (20)$$

$$T_2(0, y, t) = T_2(a, y, t) = 0 \quad (21)$$

$$T_2(x, 0, t) = T_2(x, b, t) = 0 \quad (22)$$

$$T_2(x, y, 0) = \phi(x, y) \quad (23)$$

مسئله شماره ۳،

$$\phi(x, y, 0) = 0, \psi(x, y, 0) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 T_3}{\partial t^2} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T_3(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + f(x, y, t) \quad (25)$$

$$\begin{cases} T(0, y, t) = T(a, y, t) = 0 \\ T(x, 0, t) = T(x, b, t) = 0 \\ f(x, y, t) = \frac{\alpha}{k} \left(g + \tau_q \frac{\partial g}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (26)$$

با استفاده از روش برهم نهی پاسخ کلی مسئله (۱۲) برابر است با،

$$T(x, y, t) = T_1(x, y, t) + T_2(x, y, t) + T_3(x, y, t) \quad (27)$$

که، T_1, T_2 و T_3 برابرند با،

$$T_1(x, y, t) = W_\psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{2\tau_q}} B_{mn} \sin(\varphi_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (28)$$

$$T_1(x, y, t) = W_\psi(x, y, t) = F(x, y, t, \psi(x, y)) \quad (29)$$

تئوری ساختار یک ابزار است که برای حل مسائل خطی انتقال حرارت هذلولوی از آن می‌توان استفاده کرد. این روش بیانگر یک حل دقیق از معادله انتقال حرارت هذلولوی با استفاده از ریاضیات پایه است و برای حل مسائل انتقال حرارت با جملات و شرایط غیرهمگن نیز می‌توان به کار برد. به طوری که مسئله اصلی به مسائل ساده تری تبدیل می‌شود و هر مسئله دارای یک شرط یا جمله غیرهمگن است. این شرایط غیرهمگن عبارتند از، تولید انرژی، شرایط اولیه و شرایط مرزی که برای هر مسئله مقادیر متفاوتی را دارند و با استفاده از اصل برهم نهی که یکی از قدیمی‌ترین و پربکارترین روش‌ها برای حل مسائل انتقال حرارت هدایتی است، پاسخ کلی برابر است با مجموع تمام میدان‌های دمای بدست آمده از هر مسئله.

۳-۱ حل مدل انتقال حرارت غیر فوریه ای

مسئله شماره ۱:

$$f(x, y, t) = \phi(x, y) = 0 \quad (14)$$

$$f(x, y, t) = \phi(x, y) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T_1(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1(x, y, t)}{\partial y^2} \right] \quad (16)$$

$$T_1(0, y, t) = T_1(a, y, t) = 0$$

$$T_1(x, 0, t) = T_1(x, b, t) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad (18)$$

مسئله شماره ۲:

$$f(x, y, t) = 0, \psi(x, y) = 0 \quad (19)$$

(۳۸)

$$T_{mn}(t) = e^{-\frac{t}{2\tau_q}} (A_{mn} \cos(\varphi_{mn} t) + B_{mn} \sin(\varphi_{mn} t))$$

A_{mn} و B_{mn} ضرایب مجهول هستند و با اعمال شرایط اولیه بدست می آیند،

(۳۹)

$$T_1(x, y, 0) = \phi(x, y) = 0 \rightarrow A_{mn} = 0$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x, y, 0) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_{mn} B_{mn}) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \psi(x, y)$$

(۴۱)

$$B_{mn} = \frac{1}{\varphi_{mn} M_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left\{ \psi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right\}$$

$$M_{mn} = M_m M_n = \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{b} \right) = \frac{ab}{4} \quad (۴۲)$$

بنابراین پاسخ مسئله ۱ برابر است با،

$$T_1(x, y, t) = W_{\psi}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{2\tau_q}} B_{mn} \sin(\varphi_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (۴۳)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\varphi_{mn} M_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left\{ \psi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right\} \quad (۴۴)$$

$$T_2(x, y, t) = \left(\frac{1}{\tau_q} + \frac{\partial}{\partial t} \right) W_{\varphi}(x, y, t) = \left(\frac{1}{\tau_q} + \frac{\partial}{\partial t} \right) F(x, y, t, \varphi(x, y)) \quad (۳۰)$$

$$T_3 = \int_0^t W_{f_{\tau}}(x, y, t - \xi, f(x, y, \xi)) d\xi = \int_0^t F(x, y, t - \xi, f(x, y, \xi)) d\xi \quad (۳۱)$$

همانطور که پاسخ سه مسئله نشان می دهد T_3 تاثیر تابش لیزر را نشان می دهد و برای بدست آوردن T_3 کافی است در رابطه T_1 به جای ψ مقدار f را جایگزین کنیم. در معادله (۳۱) انتگرال نسبت به متغیر کاذب ξ است و با متغیر t به عنوان ثابت برخورد می شود.

پاسخ مسئله (۱) بر اساس شرایط مرزی (۱۶) و (۱۷) و استفاده از بسط فوریه به صورت زیر است،

$$\left[T_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \quad (۳۲)$$

$T_{mn}(t)$ تابعی است که باید مشخص شود و با جایگزینی رابطه (۳۲) در (۱۲) و با فرض $f(x, y, t) = 0$ داریم،

$$\tau_q T_{mn}''(t) + T_{mn}'(t) + k_{mn}^2 T_{mn}(t) = 0 \quad (۳۳)$$

$$k_{mn}^2 = \alpha \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (۳۴)$$

ریشه های معادله فوق برابر است با ،

$$r_{1,2} = \alpha_{mn} + \varphi_{mn} i \quad (۳۵)$$

$$\alpha_{mn} = -\frac{1}{2} \tau_q \quad (۳۶)$$

$$\varphi_{mn} = \frac{\sqrt{4\tau_q k_{mn}^2 - 1}}{2\tau_q} \quad (۳۷)$$

پاسخ معادله همگن بالا به صورت زیر است،

انتخاب شدند و برای محاسبه و رسم شکل‌ها از نرم افزار متلب استفاده شده است.

که با استفاده از تئوری ساختار، T_3 برابر است با،

(۴۵)

جدول (۱) مقادیر لازم برای رسم میدان های دما [۷ و ۸]

a	b	d	g_0
۰,۰۲ mm	۰,۰۲ mm	۰,۰۱ mm	$5 \times 10^{-11} \text{ W/m}^2$
k	α	β	δ
$0.8 \text{ W(m}^\circ\text{C}^{-1})$	$1.4 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$4/9 \times 10^{-1} \text{ s}^{-1}$	$2/45 \times 10^{-1} \text{ s}^{-1}$
μ	τ_q		
$1 \times 1000 \text{ m}^{-1}$	۱ ps		

$$T_3(x, y, t) = \left(\frac{4}{ab} \right) \left(\frac{\alpha g_0}{k} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\varphi_{mn}} \right) \left(\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \int_0^a e^{(-\mu x)} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b e^{(-\frac{8y^2}{d^2})} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right\} \int_{\xi=0}^{\xi=t} \left(e^{\left(\frac{-(t-\xi)}{2\tau_q} \right)} \sin \varphi_{mn}(t-\xi) \right) d\xi \left[(1-\tau_q\beta)e^{(-\beta(t-\xi))} - (1-\tau_q\delta)e^{(-\delta(t-\xi))} \right]$$

۴-۱ رسم میدان دمای مدل های فوریه ای و غیر فوریه ای

در شکل (۲) میدان دمای T_3 مدل فوریه ای نشان داده شده است. T_3 تاثیر تابش انرژی لیزر به لبه سمت چپ را نشان می دهد. طبق شکل حداکثر دما در $x=1\text{mm}$ اتفاق می افتد. به دلیل این که تابع تابش لیزر انتخاب شده به صورت نمایی است، تغییرات دما پس از گذشت زمان بسیار کم است، طوری که مقدار T_3 در زمان های مختلف برهم منطبق می شود.

میدان دمای T_3 مدل فوریه ای نیز به همین ترتیب به صورت

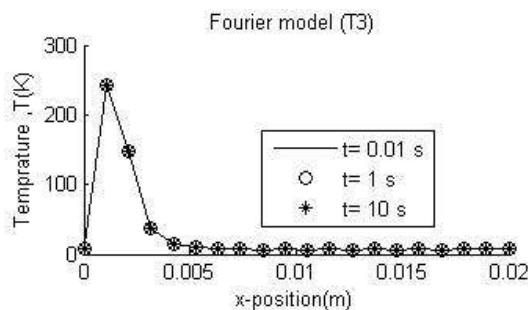
زیر بدست می آید،

(۴۶)

$$T_3 = \left(\frac{4}{ab} \right) \left(\frac{\alpha g_0}{k} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \int_0^t e^{-\alpha(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)(t-\xi)} \left\{ e^{-\beta(t-\xi)} - e^{-\delta(t-\xi)} \right\} d\xi \int_0^a \int_0^b e^{-\mu x - \frac{8y^2}{d^2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

۴-۲ نتایج

در این قسمت میدان های دمای T_3 مدل فوریه ای و غیر فوریه ای رسم می شوند. مقادیر لازم برای رسم معادلات هدایت هذلولوی از مقاله آنتاکی^۶ [۷] برای گوشت عمل آوری شده و مشخصات تابع لیزر که با رابطه (۱۰) نشان داده شد، مشابه کار یی^۷ و همکاران [۸]، به صورت جدول زیر

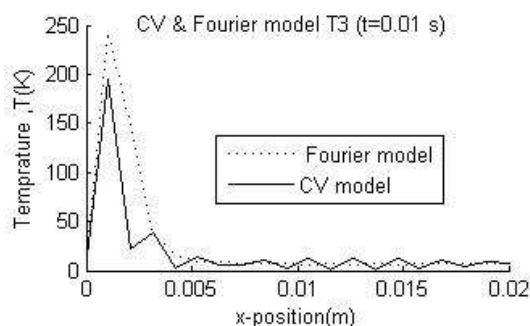


شکل (۲) میدان دما T_3 مدل فوریه ای در زمان های مختلف

(در $y=10\text{ mm}$ و شرایط مرزی دما ثابت $T=0\text{K}$)

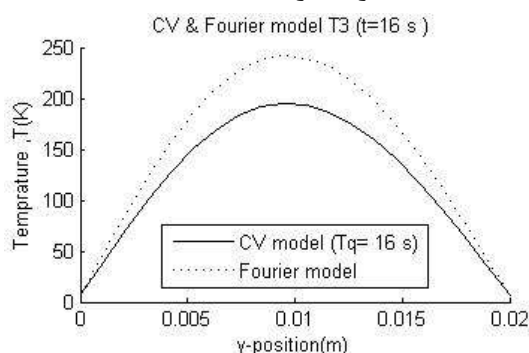
۳. Antaki etal.

۴. Yi etal.



شکل (۵) مقایسه میدان دما T_3 مدل CV و فوریه ای

(در شرایط مرزی دما ثابت $T = 0^\circ\text{K}$ و $y = 10\text{ mm}$)



شکل (۶) میدان دمای T_3 مدل CV و فوریه ای

(در $x = 1\text{ mm}$ و شرایط مرزی دما ثابت $T = 0^\circ\text{K}$)

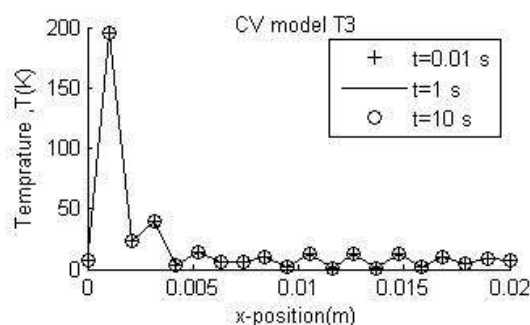
۵- نتیجه گیری

در این مقاله تاثیر تابش لیزر به یک صفحه دوبعدی با خواص فیزیکی و گرمایی ثابت به روش تحلیلی با استفاده از تئوری ساختار ارائه شد و میدانهای دمای دو مدل فوریه ای و در شرایط مرزی همگن و مستقل از زمان بررسی شد و نتایج آنها به تفکیک میدانهای دما و در زمانهای مختلف رسم شد. جوابهای نهایی دو مدل هدایت حرارتی به صورت سریهای نامحدود بدست آمدند و تغییرات هر میدان با گذشت زمان مشخص شد. با توجه به انتشار حرارت با سرعت بینهایت حداکثر دمایی که مدل فوریه ای پیش بینی می کند بیشتر است. میدان دمای T_3 در زمانهای اولیه پس از اعمال لیزر روی سطح، روند افزایشی دارد و مقادیر دما هرچه از نقطه اعمال لیزر فاصله می گیریم کاهش می یابد که با توجه به فیزیک مسئله امری طبیعی است.

۶- فهرست علائم

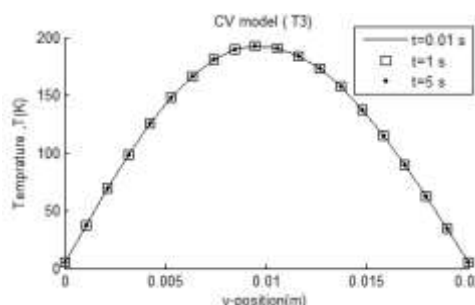
a ضخامت صفحه در راستای محور x ، (mm)

در شکل (۳) میدان دمای T_3 نشان داده شده است. در اینجا نیز حداکثر دما در $x = 1\text{ mm}$ اتفاق می افتد و تغییرات دما پس از گذشت زمان بسیار کم بوده به طوری که مقدار T_3 در زمانهای مختلف برهم منطبق شده است. در شکل (۴) نیز تغییرات میدان دمای T_3 در راستای محور y نشان داده شده است. طبق شکل (۴) حداکثر دما در $y = 10\text{ mm}$ ، حدود 200 K است.



شکل (۳) میدان دما T_3 مدل CV در زمانهای مختلف

(در $y = 10\text{ mm}$ و شرایط مرزی دما ثابت $T = 0^\circ\text{K}$)



شکل (۴) میدان دمای T_3 مدل CV در زمانهای مختلف

(در $x = 1\text{ mm}$ و شرایط مرزی دما ثابت $T = 0^\circ\text{K}$)

در شکل های (۵) و (۶) میدان دمای دو مدل فوریه ای و غیرفوریه ای CV با هم مقایسه شده اند. با توجه به انتشار حرارت با سرعت بینهایت حداکثر دمای بدست آمده توسط مدل فوریه ای از مدل غیرفوریه ای بیشتر است.

ψ	نرخ تغییر تابع اولیه	a_{mn}	ضریب
	۷-مراجع	b	ضخامت صفحه در راستای محور y , (mm)
[1] Wang, L., Zhou, X., Wei, X., Heat Conduction Mathematical Models and Analytical Solutions. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008, p 19-20.		b_{mn}	ضریب
		C_p	ظرفیت گرمایی ویژه جسم، (J/kg.K)
		d	قطر پرتو لیزر، (mm)
[2] Deng Z. S., Liu J., Analytical study on bio-heat transfer problem with spatial or transient heating on skin surface or in side biological bodies , <i>ASME J. Biomech. Eng</i> , Vol. 124, 2002, pp. 638-649.		g	تابع تولید انرژی، (W/m^3)
		$g(t)$	تغییرات زمانی لیزر، ($e^{-\beta t} - e^{-\delta t}$)
[3] Lewandowska M., Hyperbolic heat conduction in the semi-infinite body with a time-dependent laser heat source, <i>Journal of Heat and Mass Transfer</i> , Vol. 37, 2001, pp. 333-342.		$g(x)$	مشخصات مکانی لیزر در راستای x ، ($e^{-\mu x}$)
		$g(y)$	مشخصات مکانی لیزر در راستای y ، ($e^{-\mu y^2/d^2}$)
[4] Saedodin S., Torabi M., Eskandar H., Thermal Analysis of Workpiece under Electrical Discharge Machining (EDM), Using Hyperbolic Heat Conduction Model, <i>Int J Advanced Design and Manufacturing Technology</i> , Vol. 3, 2010, No. 4, pp. 1-8.		g_0	حداکثر اندازه انرژی لیزر، (W/m^3)
		k	ضریب هدایت حرارتی، ($W/m.K$)
		m و n	شاخص
		q	شار حرارتی، (W/m^2)
[5] Atefi Gh., Talaei M. R., Non-fourier temperature field in a solid homogeneous finite hollow cylinder, <i>Arch Appl Mech</i> , Vol. 81, 2011, pp. 569-583.		r	مکان یک نقطه جسم، (m)
		t	زمان، (s)
			علائم یونانی
[6] Peterson L. A., Cheung T. K., Lam T. T., Blake B. A., Heat Conduction in Two-Dimensional Slabs Subjected to Spatially Decaying Laser Pulses, <i>Journal of Thermophysics and Heat Transfer</i> , Vol. 23, 2009, No. 1, pp. 1-11.		α	ضریب نفوذ حرارتی، (m^2/s)
		β	ضریب افزایش پالس لیزر با زمان
		δ	ضریب افزایش پالس لیزر با زمان
[7] Antaki P.J., Analysis of hyperbolic heat conduction in a semi-infinite slab with surface convection, <i>Int. J. Heat Mass Transfer</i> , Vol. 40, 1997, pp. 3247-3250.		ϕ	تابع اولیه
		μ	ضریب جذب، (m^{-1})
[8] Yi S., Fong Ed, Lam T. T., <i>Two-Dimensional Analysis of Solids Subjected to Exponential Heating and Surface Convection Using Thermal Diffusion and Propagation Models</i> , 11th AIAA/ASME		ρ	چگالی جرمی، (kg/m^3)
		τ_q	زمان آسایش شار حرارتی، (s)

Joint Thermophysics and Heat Transfer
Conference, Atlanta, 2014.