



## دکوپله سازی و کنترل سیستم چند متغیره پارامتر متغیر خطی

میثم تارم<sup>۱</sup>، فضل الله براتی<sup>۲</sup>

\*نویسنده مسئول: Meysam.taram@iaukhsh.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

سیستم‌های چند متغیره، دکوپله ساز پارامتر متغیر خطی، تجزیه ساز SVD، تغییرات شرایط عملکرد

### چکیده

این مقاله به بررسی روشی برای رفع تداخل (دکوپله سازی) سیستم چند متغیره پارامتر متغیر خطی می‌پردازد. روش پیشنهادی در جستجوی بهبود کنترل سیستم‌های چند ورودی - چند خروجی با شرایط عملکرد متغیر ناشی از حضور پارامترهای متغیر و یا رفتار غیرخطی است. این روش می‌تواند منجر به بهبود عملکرد و کاهش تغییرپذیری در سیستم چند متغیره با وجود وابستگی قابل توجه در دینامیک‌های داخلی سیستم شود. ما برای تأثیر گذاشتن بر اثرات کوپلینگ، کنترل‌کننده فیدبک (پارامتر متغیر خطی) را که دکوپله ساز سیستم‌های چند ورودی - چند خروجی است، طراحی می‌کنیم. در این روش از یک پارامتر وابسته استاتیکی معکوس یا تجزیه ساز SVD (تجزیه به مقادیر منفرد) برای کاهش اثرات عناصر غیر قطری در ماتریس تابع تبدیل سیستم چند متغیره استفاده می‌شود. برای تضمین مشخصات عملکرد حلقه بسته، ماتریس‌های دکوپله ساز پارامتر وابسته، همراه با کنترل‌کننده پارامتر متغیر خطی طراحی شده، انتخاب شده‌اند. همچنین یک شاخص جدید به عنوان میزان تداخل بر اساس تجزیه سازی SVD و معکوس استاتیکی معرفی شده است و برای اهداف تطبیق آزمایش شده است که برای تأثیر بر روی کوپلینگ و تغییرپذیری سیستم‌های چند متغیره مناسب باشد.

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

## 1- مقدمه

یک نیاز اساسی در طراحی سیستم‌های چند متغیره، دکوپله سازی است. دکوپله سازی می‌تواند با چندین روش استاتیکی (در صورتی که دکوپله سازی برای سیگنال‌های مرجع مطلوب است) و همچنین به صورت کاملاً دینامیکی (در صورتی که نیاز به دکوپله سازی در همه فرکانس‌ها داشته باشیم) انجام شود. به دلیل اینکه دکوپله سازی دینامیکی یک دست آورد دقیق است، انجام این روش در یک پهنای باند از یک فرکانس شایع تر است. اگر یک فرآیند به صورت دینامیکی دکوپله شود، در این صورت مقدار مرجع یک متغیر از فرآیند تنها به یک پاسخ مربوط به همان متغیر منجر می‌شود و دیگر متغیرها بدون تغییر خواهند ماند [8]. در مقالات، دکوپله سازی‌های مختلفی برای سیستم‌های چند متغیره تغییرناپذیر بازمان به دست آمده است و در کاربردهای مهندسی با موفقیت به کار بسته شده‌اند. یک تمایل خاص به مسئله دکوپله سازی دینامیکی سیستم‌های مینیم فاز پایدار، نامینیم فاز پایدار و سیستم‌های ناپایدار حلقه باز وجود دارد ([8] و [11]). همان‌طور که انتظار می‌رود، دکوپله سازی دینامیکی یک دست آورد ضروری است که می‌توان به تدریج به آن دست یافت و می‌توان روش‌های ساده‌تر که امکان‌پذیرتر و عملی‌تر هستند را از آن به دست آورد. سؤالی که پیش می‌آید این است که این روش در چه پهنای باندی معتبر است. معمولاً روش‌های مختلف دکوپله سازی بر اساس هزینه آن مطرح می‌شود. به نظر می‌رسد هزینه اضافی در دکوپله سازی مربوط به زمانی است که صفر و قطب حلقه باز در سمت راست داشته باشیم [8]. بنابراین اگر کسی تمایل به محدود کردن دکوپله سازی در یک پهنای باند خاص و سپس صفرها و قطب‌های حلقه بسته اتفاق افتاده در این پهنای باند داشته باشد، باید هزینه دکوپله سازی در این

محدوده را مورد ارزیابی قرار دهد. بهره‌زمان‌بندی یک تکنیک محبوب طراحی است که اغلب توسط مهندسين کنترل با انجام تکراری در شرایطی که فرآیند کنترلی بسیار غیرخطی باشد مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بهره‌زمان‌بندی، تکنیک‌های کنترل خطی برای طراحی کنترلی سیستمی با بیش از یک ناحیه عملکرد بکار گرفته می‌شود. تعداد نواحی عملکرد برای پوشش کل نواحی عملکرد سیستم معمولاً توسط مهندس طراح انتخاب می‌شود و برای هر کدام از این نواحی یک کنترل‌کننده محلی طراحی می‌شود. عیب اصلی کنترل بهره‌زمان‌بندی مرسوم این است که این روش، پایداری حلقه بسته سیستم را تضمین نمی‌کند. دلیل این است که فیدبک سرتاسری به دست آمده از بهره‌زمان‌بندی، یک کنترل‌کننده غیرخطی است و حداقل تضمین‌های سنجش خطی سیستم را برقرار نخواهد کرد. در مقابل تکنیک‌های کلاسیک بهره‌زمان‌بندی، روش‌های توسعه یافته‌ی جدیدی به عنوان روش‌های بهره‌زمان‌بندی مقاوم [9] در قالب روش سیستماتیک پارامتر متغیر خطی برای طراحی کنترل‌کننده‌های زمان‌بندی شده بر اساس تمرکز بر نقطه کار سیستم ارائه شده است. یک سیستم پارامتر متغیر خطی سیستمی است که ماتریس‌های فضای حالتی را بیان می‌کند که به پارامتر برداری متغیر بازمان وابسته می‌باشند. این روش طراحی نیازمند درون‌یابی کنترل‌کننده‌های محلی نیست. درواقع آن‌ها یک گروه از کنترل‌کننده‌های خطی‌اند که تضمین‌کننده پایداری و عملکرد مطلوب در کل محدوده عملکرد می‌باشند. در بسیاری از فرآیندهای صنعتی چند متغیره در شرایطی که دکوپله سازی برای رفع تداخل میان متغیرهای ورودی و خروجی بکار گرفته می‌شود، معمولاً کنترل‌کننده تک حلقه PID به وسیله کنترل جداگانه حلقه‌های فیدبک بکار برده می‌شود. استفاده از روش طراحی استاندارد PID و سهولت تنظیم مطلوب از

طراحی ساده و برای بسیاری از کاربردها قابل اجراست، درحالی که دکوپله سازی مرسوم (نا منعطف) در فراهم کردن عملکرد مطلوب حلقه بسته در حضور غیرخطی های سیستم و یا تغییرات پارامتری ناتوان است. در این مقاله ما تنها سیستم های با ماتریس های تابع انتقال مربع را در نظر می گیریم. باین حال ایده های مورد بحث در این مقاله می تواند به راحتی در سیستم های غیر مربعی تعمیم یابند.

### 3- دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی سیستم چند متغیره

#### الف) چارچوب تحلیلی دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی

یک سیستم چند متغیره اغلب نمایانگر تأثیرات کوپلینگ میان ورودی ها و خروجی هایش است. این تأثیرات باعث ایجاد مشکلاتی در طراحی کنترلی چند متغیره می شود. دکوپله سازی مناسب بر پایه رفع مناسب تداخل در حلقه های کوپل شده است که متعاقباً اجازه می دهد تا تنظیم و پایدارسازی سیستم به آسانی انجام شود. مانند اکثر تکنیک های دکوپله سازی، برای این روش که در این مقاله مطرح شده است، دو مرحله به شرح زیر مورد نیاز است:

1. ابتدا یک جبران ساز پارامتر وابسته برای رفع اثرات جملات غیر قطری در یک سیستم پارامتر متغیر خطی (در حالت حلقه باز) طراحی می کنیم که آن را به عنوان ماتریس تابع انتقال  $G(s, p)$  مطرح می کنیم. سپس یک کنترل کننده قطری که از روش های استاندارد قابل اجرا برای سیستم های تک ورودی-تک خروجی پیروی می کند طراحی می کنیم. روش در نظر گرفته شده بر اساس طراحی یک پیش جبران ساز در راستای رفع تأثیرات کوپلینگ در  $G(s, p)$  و یا پیش و پس جبران ساز با به کارگیری یک تجزیه ساز SVD برای قطری سازی  $G(s, p)$  است. روش طراحی دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی مزایای قابل توجهی

مزیت های این روش است [5]. باین وجود و همان طور که ذکر شد این روش طراحی برای سیستم های چند متغیره شامل دو مرحله است: ابتدا جداسازی زیرسیستم های تک حلقه و سپس کنترل جداگانه هر کدام به شکلی که پایداری و عملکرد مطلوب را فراهم آورد. باین حال دکوپله سازی مرسوم، چالش غیرخطی های سیستم و تغییرات شرایط عملکرد سیستم را برطرف نمی کند. به همین دلیل است که دکوپله سازی استاندارد (دینامیکی یا استاتیکی) در دکوپله کردن موفق یک سیستم در شرایط تغییرات پایداری و شرایط مختلف عملکرد به طور خوبی عمل نمی کند. هدف از این مقاله پیشنهاد یک روش تطبیقی در قالب ماتریس های دکوپله ساز نوساز شونده با تحولات، از طریق بکارگیری یک مجموعه ی پارامتر وابسته برای نوسازی بلافاصله ی ماتریس های دکوپله سازی است.

### 2- شرح مسئله

یک مدل  $G(s, p)$  (پارامتر متغیر) ارائه شده به صورت فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{X} = A(p)x + B(p)u \quad (1)$$

$$Y = C(p)x + D(p)u \quad (2)$$

در این روابط، پارامتر متغیر بازمان  $p = [p_1, \dots, p_s]$  به عنوان یک پارامتر با پیشینه ی نامعلوم فرض می شود اما می تواند بلافاصله اندازه گیری یا تخمین زده شود. در این مقاله ما مخصوصاً تمایل داریم به مسئله طراحی کنترلی فرکانس-دامنه برای سیستم های چند متغیره در شرایطی که اثرات کوپلینگ (تداخل) (با توجه به عناصر غیر قطری در ماتریس انتقال سیستم  $G(s, p)$ ) زیاد باشند پردازیم. همچنین هدف ما ارائه روشی برای طراحی کنترل کننده دکوپله سازی است که در شرایط تغییرات عملکرد و حضور رفتار غیرخطی سیستم بتواند مشخصات طراحی را تضمین کند. روش

را در رفتار بخش‌های دکوپله شده در سیستم‌های چند متغیره مانند رفتار غیرخطی و تغییرات شرایط عملکرد فراهم می‌کند. به‌طور ویژه روش‌های پیشنهاد داده‌شده منجر می‌شوند به:

(1) یک روش سیستماتیک برای بروز رسانی لحظه‌ای ماتریس‌های دکوپله ساز که این امر تضمین‌کننده‌ی دکوپله سازی در حضور تغییرات پارامترهای سیستم است.

(2) یک طراحی کنترلی پارامتر متغیر خطی که از یک سیستم دکوپله شده جهت تضمین بهبود عملکرد حلقه بسته سیستم استفاده می‌کند.

همچنین ما تمایل به ایجاد شرایطی داریم که انتخاب مناسب ماتریس‌های دکوپله ساز پارامتر-وابسته و کنترل‌کننده جهت پایداری حلقه بسته و عملکرد مناسب را بر اساس تابع لیاپانف تضمین کند.

### ب) دکوپله سازی چند متغیره پارامتر متغیر خطی

#### بر اساس معکوس سازی

دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی را می‌توان به‌سادگی با استفاده از یک پیش جبران ساز  $W(s, p)$  که نتیجه آن به شکل یک فرآیند مانند زیر به دست می‌آید نوشت:

$$G_s(s, p) = G(s, p) W(s, p) \quad (3)$$

بنابراین انتظار می‌رود که ساختار مطلوبی داشته باشیم، مثلاً یک ساختار قطری و یا تقریباً قطری که در این صورت در مقایسه با ساختار اصلی پروسه  $G(s, p)$  می‌توانیم کنترل راحت‌تری داشته باشیم. باوجود داشتن چنین پیش جبران ساز پارامتر-وابسته ای، می‌توان یک کنترل‌کننده پارامتر متغیر خطی (قطری)  $K_s(s, p)$  را برای پروسه  $G_s(s, p)$ ، به شکل زیر طراحی کرد. کنترل کلی در نهایت به شکل زیر خواهد شد:

$$K(s, p) = W(s, p) K_s(s, p) \quad (4)$$

اگر  $G_s(s, p)$  که در (3) تعریف شد در بازه فرکانسی انتخاب‌شده قطری باشد دکوپله سازی حاصل می‌شود. دو

روش برای طراحی چنین پیش جبران سازی وجود دارد. یکی دکوپله سازی دینامیکی در شرایطی که (فرض می‌شود  $W(s, p) = G^{-1}(s, p)$ ) وارون‌پذیر است و  $G_s(s, p)$  برای قطری بودن  $G_s(s, p)$  در همه فرکانس‌ها، باید همه پارامترهای متغیر بازمان مجاز انتخاب‌شده باشند که تحقق چنین جبران سازی با توجه به مشکلات احتمالی از قبیل معکوس شدن تابع انتقال فرآیند می‌تواند مشکل باشد ([8], [11]). روش دوم دکوپله سازی استاتیکی در یک فرکانس خاص  $\omega_0$  در شرایطی است که ما به دنبال یک جبران ساز پارامتر-وابسته  $W(p)$  برای  $G_s(j\omega_0, p)$  هستیم تا آن را به یک ماتریس قطری مورد انتظار تبدیل کنیم. این امر ممکن است با انتخاب یک پیش جبران ساز  $W(p) = G_0^{-1}(p)$  در شرایطی که  $G_0$  یک تقریب واقعی از  $G(j\omega_0)$  باشد، به دست آید. در دستیابی به دکوپله سازی استاتیکی پایدار، قرار دادن  $\omega_0 = 0$ ، یک روش متعارف است. همچنین به‌طور معمول پهنای باند-فرکانسی یک انتخاب خوب دیگر برای  $\omega_0$  در زمانی است که تأثیر تغییرات شرایط عملکرد روی کاهش کوپلینگ در این فرکانس زیاد است [11]. برای هر دو روش دکوپله سازی استاتیکی و دینامیکی، اگر ماتریس انتقال حلقه باز سیستم مربع نباشد، می‌توان ماتریس رتبه کامل شبه معکوس که برای تمامی تغییرات مجاز پارامتری  $p$  در طول زمان داریم را بکار گرفت. با توجه به این کاربرد ساده، ما در سرتاسر این مقاله تمرکز خود را بر روی دکوپله سازی استاتیکی می‌گذاریم.

### ج) دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی بر اساس

#### تجزیه سازی SVD

ایده اصلی و پایه در اینجا این است که در شرایطی که  $W_1$  و  $W_2$  ماتریس پارامتر-وابسته مناسب جهت دکوپله سازی هستند،  $G_s(s, p) = W_2(s, p) G(s, p) W_1(s, p)$  بعنوان

در زمانی که دکوپله سازی به طور کامل محقق نشده است، تضمین می‌کند. در طراحی، تجزیه و تحلیل تداخل سیستم‌های چند متغیره بسیار مهم است. معیارهای استفاده شده مختلفی برای بیان میزان تداخل میان ورودی‌ها و خروجی‌ها بر اساس: آرایه افزایش نسبی (RGA) معرفی شده در [6]، شاخص‌های تداخل توسعه یافته حالت ماندگار توسط چانگ و داویسون [7] و روش جدید مطرح شده آستروم [3]، وجود دارد. در قسمت دوم این بخش، ما ایده توسعه یافته در [3] و [4] را تعمیم داده و معیار تداخل جدید بر اساس تجزیه SVD و معکوس سازی استاتیکی را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای طراحی دکوپله ساز پارامتر متغیر خطی به خوبی عمل می‌کند.

#### الف) پایداری و آنالیز تنزل عملکرد

کنترل کننده دکوپله شده با دو معیار سنجیده می‌رود:

پایداری نامی و عملکرد مقاوم [10] و [12]

اگر کنترل کننده تنها برای عناصر قطری سیستم طراحی شده باشد، پایداری نامی حاصل خواهد شد و پایداری را برای سیستم حلقه بسته فراهم خواهد کرد. عملکرد مقاوم را شرایطی گویند که عملکرد مطلوب مورد نظر ما در همه طول فرآیند همراه با عدم قطعیت‌های موجود برآورده شود. لازم به ذکر است که هر دو باعث مطرح شدن توابع حساسیت و مکمل حساسیت مرزی در تمامی حلقه‌های کنترلی تک ورودی-تک خروجی مستقل و کنترل کننده دکوپله شده خواهد شد که می‌تواند به سادگی در تشکیل حلقه  $H^\infty$  از کنترل کننده‌های تک ورودی-تک خروجی استفاده شود. در ادامه تعاریف ارائه شده در بخش قبل که داشتیم:

$$G_S(s,p) = W_2(p)G(s,p)W_1(p)$$

به عنوان یک تعریف داریم:

$$D_S(s,p) = \text{diag} \{G_{Sii}(s,p)\}$$

بطوریکه  $G_{Sii}$  عناصر قطری جبران شده  $G_S$  است. در یک نمونه از دکوپله سازی کامل و خوب باید:

سیستم حلقه باز تشکیل شود تا بتوان  $G_S(s,p)$  را قطری کرد. با توجه به این موضوع است که ما تمایل به مسئله دکوپله سازی استاتیکی و جبران سازهایی داریم که پارامتر وابسته استاتیکی می‌باشند، پس:

$$K(s,p) = W_1(p) K_S(s,p) W_2(p) \quad (5)$$

بطوریکه  $K_S(s,p)$  یک کنترل کننده چند متغیره قطری طراحی شده برای دکوپله سازی فرآیند  $G_S(s,p)$  است. کنترل کننده SVD یک نمونه خاص از یک پس و پیش جبران ساز مطابق با فرم توضیح داده شده‌ی بالا است:

$$W_1(p) = V_0(p)$$

$$W_2(p) = U_0^T(p)$$

که در آن  $U_0(p)$  و  $V_0(p)$  از یک مقدار پارامتری تجزیه شده  $G_0(p) = U_0(p)\Sigma_0(p)V_0^T(p)$  حاصل شده است و  $G_0(p)$  یک تقریب حقیقی از  $G(j\omega_0, p)$  است که در فرکانس  $\omega_0$  داده شده است. دکوپله سازی SVD ممکن است حول  $\omega_0=0$  (دکوپله سازی حالت ماندگار) یا  $\omega_0=\omega_b$  (دکوپله سازی فرکانس پهنای باند) انجام شود (البته در مواردی که ماتریس  $U_0(p)$  و  $V_0(p)$  تولید شده باشند). از این رو، روش پیشنهادی دکوپله سازی شبیه به یک تجزیه سازی SVD است با این تفاوت که تجزیه انجام شده OFF-LINE است و یک اصل کاربردی برای بروز رسانی ماتریس دکوپله ساز در هر لحظه از زمان داریم.

#### 4-مبحث اصلی

دکوپله سازی یک حساسیت روی تداخل و یا رفع حداکثری تداخل با توجه به خطاهای مدل سازی است و از این رو مقاوم سازی مناسب در طراحی‌ها باید تضمین شود. در صورتی که تأثیر برخی از تداخل‌های حلقه‌ها قابل صرف نظر باشد می‌توان از دکوپله سازی تکراری استفاده کرد. در ابتدای این بخش، ما بر اساس تجزیه و تحلیل، نتایجی را از سیستم حلقه بسته پارامتر متغیر خطی ارائه می‌کنیم که پایداری حلقه بسته و عملکرد مطلوب را

عدم قطعیت ضرب شونده خروجی به وسیله تعمیم فرمول موجود در [12] به شکل زیر است:

$$E(s,p) = (G_s(s,p) - D_s(s,p)) D_s^{-1}(s,p)$$

یک پیش آنالیز را می توان برای تعیین نمودن مقدار تنزل عملکرد و پایداری ناشی از یک دکوپله سازی ناقص انجام داد. این را می تواند به عنوان مثال با توابع لیاپانف پارامتر وابسته استفاده شده برای پایداری و عملکرد مطلوب حلقه بسته در قالب یک چهارچوب پارامتر متغیر خطی انجام داد. نتایج ارائه شده در [2] می تواند برای این آنالیز بکار گرفته شوند.

در هر حال باید ذکر نمود که با توجه به وابستگی پارامتری تمامی ماتریس های انتقال در فرمول های بالا، چک نمودن پایداری نامی و عملکرد مقاوم نیازمند اسلوب بندی مناسب فضای پارامتری برای دستیابی به یک فضای بهینه با بعد محدود و بررسی مناسب شرایط است.

#### ب) میزان تداخل در سیستم های پارامتر متغیر خطی

در شرایطی که هدف ما طراحی یک کنترل کننده  $K(s,p)$  پارامتر وابسته برای یک سیستم پارامتر متغیر خطی  $G(s,p)$  است، فرض می شود که کنترل کننده طراحی شده یک پیش و پس جبران ساز ترکیب شده با یک کنترل کننده PI پارامتر متغیر عنوان شده در [1] است. قانون کنترلی که می تواند ارائه شود:

$$U(s) = W_1(p)(\bar{K}(s,p)R(s) - \bar{K}(s,p)W_2(p)Y(s)) \quad (10)$$

در شرایطی که  $W_1$  و  $W_2$  پیش و پس جبران ساز هستند و  $U$  یک ورودی کنترلی است و  $Y$  یک خروجی اندازه گیری شده و  $R$  یک ورودی مرجع است. کنترل کننده (PI)  $\bar{K}$  متفاوت از  $K$ ، برای پذیرش انعطاف در تغییرات مقدار مرجع، انتخاب شده است [1]. با توجه به طبیعت غیرمتمرکز طراحی، هر دو ماتریس برای یک سیستم با تعداد ورودی و خروجی یکسان، قطری پارامتر وابسته

$$G_s(s,p) = D_s(s,p)$$

در واقع  $D_s(s,p)$  یک تقریب از  $G_s(s,p)$  است. در نهایت  $D_d(s,p)$  برای ایجاد ماتریس قطری دیگری بنام  $D_d(s,p)$  با استفاده از مقیاس گذاری استاتیکی یا دینامیکی دست کاری بیشتری می شود. روش طراحی کنترلی بحث شده غیرمتمرکز، یک روش مشتمل بر کنترل کننده های تک ورودی-تک خروجی مستقل  $q$  بر اساس  $D_d(s,p)$  است. فرض کنیم که چنین کنترل کننده ی طراحی شده ای  $(K_s(s) = \text{diag}\{k_1(s), \dots, k_q(s)\})$  برای سیستم جبران شده پارامتر وابسته  $D_d(s,p)$ ، داده شده است. از این به بعد کنترل کننده نهایی می شود [5]. حساسیت و مکمل حساسیت بر اساس  $D_s(s,p)$  و کنترل کننده های مستقل تک ورودی-تک خروجی بدین گونه تعریف می شوند:

$$S_D(p) = (I + D_s(p) K_s)^{-1} \quad (6)$$

$$T_D(p) = (I + D_s(p) K_s)^{-1} D_s(p) K_s$$

در نظر داشته باشید که  $D_s(s,p)$  و  $K_s(p)$  هر دو قطری هستند، پس ماتریس  $S_D(p)$  به خوبی قطری خواهد شد و از این جهت روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\|S_D(p)\|_{\infty} = \max_p \max_{i=1, \dots, q} \{ \|(1 + G_{sii} K_i)^{-1}\|_{\infty} \} \quad (7)$$

$$\|T_D(p)\|_{\infty} = \max_p \max_{i=1, \dots, q} \{ \|(1 + G_{sii} K_i)^{-1}\|_{\infty} G_{sii} K_i \|_{\infty} \} \quad (8)$$

استفاده از کنترل کننده نهایی ارائه شده در (5) برای سیستم

منجر به توابع حساسیت و مکمل حساسیت مکمل زیر خواهد شد:

$$S(p) = (I + G_s(p) K_s)^{-1} \quad (9)$$

$$T(p) = (I + G_s(p) K_s)^{-1} G_s(p) K_s$$

اگر  $S(p)$  تعریف شده در بالا پایدار باشد پایداری نامی به دست خواهد آمد. با توجه به دکوپله سازی ناقص، پایداری نامی ممکن است تضمین نشود. راه حل ساده برای آزمودن مسئله پایداری در شرایط دکوپله سازی غیر ایده آل، برطرف کردن تفاوت میان  $G_s(p)$  و  $D_s(p)$  به عنوان یک

می‌باشند. ساختار زیر را برای کنترل‌کننده‌ها در شرایطی که بهره‌های کنترل‌کننده پارامتر-وابسته هستند، در نظر گرفتیم:

$$K_j = K_{P(I)} + \frac{K_{I(I)}}{S}, \quad \bar{K}_j = \frac{K_{I(I)}}{S}$$

در مقالات [1] و [3] و [4] نشان داده شده است که مقدار استثنایی در  $\bar{K}_j$  برای دستیابی به کنترل PID غیرمتمرکز در سیستم‌های LTI ضروری است. تجزیه سازی SVD در شرایط دکوپله سازی استاتیکی در حالت ماندگار،  $W_2 = U_0^T$  و  $W_1 = V_0$  به طوری که  $G_0(p) = U_0(p)\Sigma_0(p)V_0^T(p)$  یک تجزیه سازی از تابع انتقال سیستم LPV ارزیابی شده در  $S=0$  است. تابع انتقال سیستم دکوپله شده به عنوان:

$$|q_{11}(s, p)q_{22}(s, p)| \gg |q_{12}(s, p)q_{21}(s, p)|$$

با استفاده از نامساوی دوم، ماتریس  $H$  را می‌توان این گونه تقریب زد:

$$H(s, p) = \begin{bmatrix} q_{11}C_1/(1+q_{11}C_1) & q_{12}C_2/(1+q_{11}C_1)(1+q_{22}C_2) \\ q_{21}C_1/(1+q_{11}C_1)(1+q_{22}C_2) & q_{22}C_2/(1+q_{22}C_2) \end{bmatrix}$$

عناصر غیر قطری در ماتریس  $H$  نشان‌دهنده‌ی میزان تداخل در طراحی چند متغیره خواهند بود. با توجه به عملکرد انتگرالی در کنترل‌کننده، تداخل در فرکانس‌های پایین کوچک است. به آسانی قابل مشاهده است که:

$$H_{12} = q_{12}\bar{C}_2 S_1 S_2, \quad H_{21} = q_{21}\bar{C}_1 S_1 S_2 \quad (11)$$

$S_1$  و  $S_2$  توابع حساسیت مربوط به اولین و دومین حلقه‌هایی هستند که تداخل حلقه‌ها را در آن‌ها در نظر نمی‌گیریم. یک کران بالایی از قسمت‌های غیر قطری می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$|H_{12}(j\omega)| \leq |q_{12}\bar{C}| M_{s1} M_{s2}$$

$$|H_{21}(j\omega)| \leq |q_{21}\bar{C}| M_{s1} M_{s2}$$

$M_{s1}$  و  $M_{s2}$  بیشترین مقدار از  $S_1$  و  $S_2$  می‌باشند و لازم به ذکر است که حالت دائمی با تعمیم  $G(s, p)$  با استفاده از سری‌های مک لوران در  $S$  حول  $S=0$  به دست می‌آید.

$$Q(s, p) = U_0^T(p)G_s(s, p)V_0(p) \approx U_0^T(G(S=0, p) + S(dG(s, p)/ds(s=0))V_0 = \Sigma_0 \Sigma_1 \quad (12)$$

به طوری که:

$$\Sigma_0 = U_0^T G(s=0, p)V_0 = \text{diag}(\bar{\sigma}_0(p), \bar{\sigma}_1(p))$$

$$\Sigma_1 = U_0^T (dG(s, p)/ds(0))V_0 = [\bar{\sigma}_{ij}]_{i,j \in \{1,2\}}$$

پس:

می‌باشند. ساختار زیر را برای کنترل‌کننده‌ها در شرایطی که بهره‌های کنترل‌کننده پارامتر-وابسته هستند، در نظر گرفتیم:

$$K_j = K_{P(I)} + \frac{K_{I(I)}}{S}, \quad \bar{K}_j = \frac{K_{I(I)}}{S}$$

در مقالات [1] و [3] و [4] نشان داده شده است که مقدار استثنایی در  $\bar{K}_j$  برای دستیابی به کنترل PID غیرمتمرکز در سیستم‌های LTI ضروری است. تجزیه سازی SVD در شرایط دکوپله سازی استاتیکی در حالت ماندگار،  $W_2 = U_0^T$  و  $W_1 = V_0$  به طوری که  $G_0(p) = U_0(p)\Sigma_0(p)V_0^T(p)$  یک تجزیه سازی از تابع انتقال سیستم LPV ارزیابی شده در  $S=0$  است. تابع انتقال سیستم دکوپله شده به عنوان:

$$Q(s, p) = U_0^T(p)G_s(s, p)V_0(p)$$

تعریف می‌شود و فرآیند خروجی جبران شده بعنوان  $Y_t(s) = U_0^T(p)Y$  می‌باشد و با استفاده از نتایج (10) در

$$Y_t = U_0^T G(s) V_0 (\bar{C}R(s) - CY_t)$$

و یا

$$Y_t(s) = H(s, p)R(s)$$

و

$$H(s, p) = (I + Q(s, p)C(s, p))^{-1}Q(s, p)\bar{C}(s, p)$$

را برای ساده‌سازی فرمول‌ها در نظر می‌گیریم و مطالعه خود را روی سیستم‌های دو ورودی-دو خروجی پارامتر متغیر خطی متمرکز می‌کنیم. تعریف شدن:

$$Q(s, p) = [q_{ij}]_{i,j \in \{1,2\}}$$

منجر می‌شود به:

$$H(s, p) = \begin{bmatrix} 1+q_{11}C_1 & q_{12}C_2 \\ q_{21}C_1 & 1+q_{22}C_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{11}C_1 & q_{12}C_2 \\ q_{21}C_1 & q_{22}C_2 \end{bmatrix}$$

در ادامه بحث آمده شده در [4]، عناصر  $H(s, p)$  می‌توانند بیشتر ساده‌سازی شوند. پهنای باند حلقه بسته  $\omega_b$  با صفرهای سمت راست در صفحه مختصات از سیستم حلقه باز  $G(s, p)$  محدود شده‌اند. با فرض اینکه در اینجا یک صفر منفرد در  $Z > 0$  وجود دارد که بین دو حلقه به طور تقریبی توزیع شده است، از این رو باید پهنای باند کمتر از

دنبال می کنیم. سیستم چند متغیره پارامتر متغیر خطی با ماتریس تابع انتقال  $2 \times 2$  زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s, p) = \begin{bmatrix} \frac{p^2}{s+p} & \frac{p}{s+p} \\ \frac{p}{s+p} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

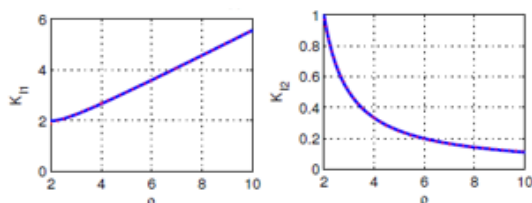
مشکل کنترلی این سیستم این است که پهنای باند سیستم حلقه باز به شدت بستگی به پارامتر  $p$  داشته و روش های استاندارد طراحی کنترول کننده مانند QFT نتیجه ای جز طراحی های غیر واقعی ندارد. به هر حال نشان خواهیم داد که با استفاده از مزیت اندازه گیری پارامتری پارامتر متغیر خطی این دقت را می توان افزایش داد. به سادگی می توان دریافت که سیستم صفر RPH (صفر سمت راست) ندارد و پس از دکوپله سازی استاتیکی پارامتر متغیر خطی، تابع انتقال دکوپله شده به شکل زیر خواهد شد:

$$Q(s, p) = \begin{bmatrix} \frac{(2p-1)s+p}{(s+p)(s+1)} & \frac{p(1-p)s}{(s+p)(s+1)} \\ \frac{2(p-1)s}{(s+p)(s+1)} & \frac{(2-p)s+p}{(s+p)(s+1)} \end{bmatrix}$$

مقادیر تداخل بدین شکل می توانند محاسبه شوند:

$$\bar{b}_{12} = 1-p \text{ و } \bar{b}_{21} = 2(p-1)/p^2$$

لازم به توضیح است که برای  $p=1$ ، دکوپله سازی کامل خواهیم داشت و این گونه خواهد بود که هیچ تداخلی میان عناصر غیر قطری وجود ندارد و مانند این است که طراحی تک ورودی-تک خروجی یک کار بی اهمیت است. به طور کلی فارغ از مثال تحت مطالعه ما، تمرکز ما بر روی زمانی است که  $p \neq 1$  باشد. لازم است که کوپلینگ-های  $h_{12}=h_{21}=0.2$  باشند و بیشترین حساسیت های  $M_{s1}=M_{s2}=0.45$  باشد.



$$Q(s, p) = \begin{bmatrix} \frac{60(p)}{s+60} & \frac{5612(p)}{61(p)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

و این نتایج به دست آمده از کران بالای بخش های غیر قطری در فرکانس های پایین به دست می آید:

$$|H_{12}(j\omega)| \leq h_{21} = |\bar{b}_{12} K_{I(2)}| M_{s1} M_{s2} \\ |H_{21}(j\omega)| \leq h_{21} = |\bar{b}_{21} K_{I(1)}| M_{s1} M_{s2} \quad (14)$$

همچنین لازم به ذکر است که در فرکانس های پایین،

$$H_{22}(p)=1 \text{ و } H_{11}(p)=1$$

به عنوان مثال:

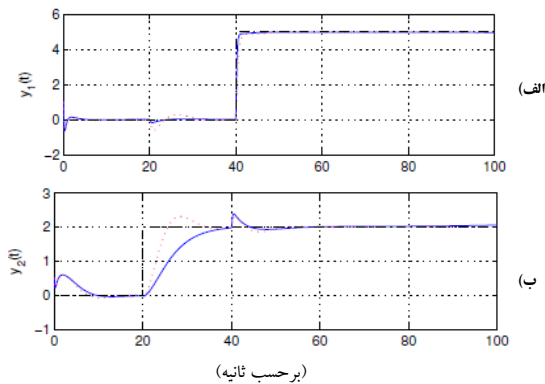
$$H_{11}(p) = \frac{q_{11}\bar{c}_1}{1+q_{11}\bar{c}_1} = \frac{60KI(1)/s}{1+60KI(1)/s} = \frac{60KI(1)}{s+60KI(1)} = 1$$

کران بالایی گفته شده در (14) در صورتی که پهنای باندهای مربوط به دو حلقه کاملاً متفاوت باشد، محدود خواهد شد. نتایج گرفته شده در این بخش برای تجزیه سازی SVD بر اساس دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی بکار گرفته می شود. با توجه به دکوپله سازی استاتیکی پارامتر متغیر خطی معکوس بر اساس پیش و پس جبران سازهای  $W_2=I$  و  $W_1(p)=G^{-1}(S=0, p) \equiv D_0$  در (10) و تعاریف یکسان مطرح شده در مورد دکوپله سازی بر اساس SVD این گونه نتیجه می گیریم که یک مجموعه مشابه از نتایج در (14) داریم با این تفاوت که عناصر قطری ماتریس  $Q$  در (13)، در حال حاضر برابر با 1 هستند.

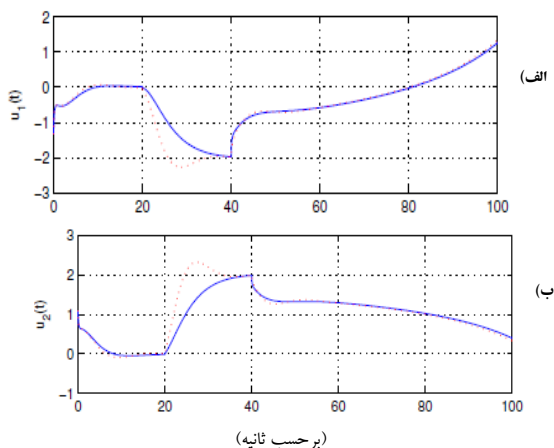
## 5- مثال عددی

در این بخش ما روش های طراحی شده در بخش های قبلی را برای دکوپله و کنترول کردن سیستم های چند متغیره بکار خواهیم گرفت. مثال داده شده که یک تابع انتقال  $2 \times 2$  پارامتر-متغیر است، برای آزمایش تأثیر روش دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی همراه با روش طراحی کنترول تطبیقی PI بر اساس مقدار تداخل مطرح شده در این مقاله داده شده است. در این مثال، ما نتایج تئوری به دست آمده در بخش قبلی را برای طراحی یک کنترول کننده PI پارامتر-وابسته

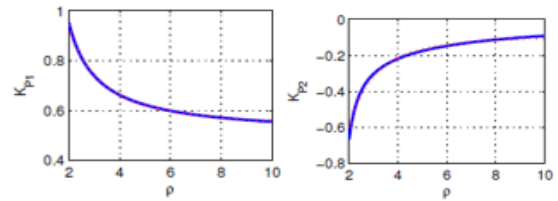
Y2 (حلقه بسته) حاصل شده از اتصال سیستم  $G(s, p)$  حلقه باز، جبران ساز پارامتر متغیر خطی و کنترل کننده PI را ارائه می دهد.



شکل (2): سیگنال های خروجی سیستم حلقه بسته: خطوط پررنگ و نقطه چین به ترتیب مربوط به استفاده از کنترل کننده های تطبیقی و کنترل کننده های PI با بهره ثابت همان گونه که دیده می شود، کنترل کننده PI که بهره اش با پارامتر  $p$  تطبیق داده شده می شود، از کنترل کننده PI با بهره ثابت بهتر عمل می کند.



شکل (3): سیگنال های خروجی کنترل کننده PI با استفاده از استراتژی تطبیقی (خطوط پررنگ) و استراتژی با بهره ثابت (نقطه چین) آنچه در شکل (3) نشان داده شده است مقایسه میان سیگنال های  $U1$  و  $U2$  از دو طرح و روش طراحی کنترلی است. محاسبات نشان می دهد که میانگین ورودی کنترلی  $U1$  و  $U2$  باید به ترتیب برای استراتژی تطبیقی 0.87 و 1.44 و برای استراتژی بهره ثابت 1.33 و 1.91 باشد. نتایج ارائه شده مؤید آن است که روش کنترل تطبیقی PI



شکل (1): مقدار توان تقریب بهره های PI  $K_{p/I} = a p^b + c$ : خطوط پررنگ و نقطه چین ها به ترتیب نشان دهنده داده های اصلی و خروجی های متناسب با آنها است.

بهره های انتگرالی به دست آمده از  $K_{I(1)} = \frac{p^2}{2|p-1|}$  و  $K_{I(2)} = \frac{1}{|p-1|}$  را برای به دست آوردن بهره های تناسبی در کنترل کننده های PI برای دو حلقه موجود است و ما از روش مستقیم جایابی قطب استفاده می کنیم [1]. لازم به ذکر است که مکان قطب ها بستگی به پارامتر  $p$  خواهد داشت و این تضمین کننده این است که قطب ها برای هر  $p$  در سمت چپ صفحه مختصات قرار می گیرند. روش پارامتر وابسته زیر برای جایابی قطب تعیین می کند که:

$$K_{p1} = \frac{p}{2p^2 - 1} + \frac{p^2}{2(p-1)(p+1)}$$

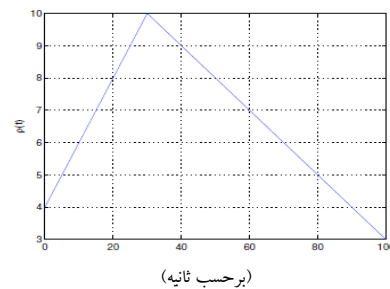
$$K_{p2} = \frac{p}{2-p^2} + \frac{1}{|p-1|(p+1)}$$

به منظور به دست آوردن عبارات ساده تر برای بهره های PI، یک مسئله غیرخطی با حداقل مربعات در فرم  $y = ax^b + c$  را برای بهره های PI جهت متناسب سازی اثر تقریب ها حل می کنیم. شکل (1) مقایسه میان بهره های کنترلی PI و اثر تقریب هایشان را با استفاده از یک معادله دوقسمتی نشان می دهد. بعد از آن، با نتایج شبیه سازی در حوزه زمان برای مقایسه عملکرد حلقه بسته از دو روش استفاده شده است. 1- دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی در شرایطی که بهره های کنترلی PI پارامتر وابسته نیستند 2- دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی در شرایطی که علاوه بر ماتریس های دکوپله سازی، بهره های کنترلی PI در هر دو حلقه هم بر اساس اندازه گیری پارامتری پارامتر متغیر خطی برنامه ریزی شده اند. توجه داریم که روش دوم نتایج مناسب بحث شده قبلی در این بخش را بکار می گیرد. شکل (2) خروجی های  $Y1$  و

## مراجع:

- [1] Astrom K.J. and Hagglund T., PID controllers: theory, design, and tuning, *Instrument Society of America*, Research Triangle Park, NC, 1995.
- [2] Apkarian P. and Adams R.J., "Advanced Gain-scheduling Techniques for Uncertain Systems," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, Vol. 6, 1998, pp. 21-32.
- [3] Astrom K.J., Johansson K.H., and Wang Q.G., "Design of decoupled PID controllers for MIMO systems," in Proc. American Control Conference, pp. 2015-2020, Jun. 2001.
- [4] Astrom K.J., K.H. Johansson, and Wang Q.G., "Design of decoupled PI controllers for two-by-two systems," *IEE Proc. on Control Theory and Applications*, 149(1), 2002, pp. 74-81.
- [5] Albertos P. and Sala A., *Multivariable Control Systems: An Engineering Approach*, Springer, 2004.
- [6] Bristol E., "On a new measure of interaction for multivariable process control," *IEEE Trans. Autom. Control*, 1966, 11, p. 133.
- [7] Chang T.N. and Davison E.J., "Steady-state interaction indices for decentralized unknown systems," in Proc. of IEEE Conf. Decision and Control, Vol. 2, 1986, pp. 881-887.
- [8] Goodwin G.C., Graebe S.F., and Salgado M.E., *Control system design*, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [9] Rugh W.J. and Shamma J.S., "A Survey of Research on Gainscheduling," *Automatica*, Sep. 2000, pp. 1401-1425.
- [10] Skogestad S. and Morari M., "Robust performance of decentralized control systems by independent design," *Automatica*, 25(1), 1989, pp. 119-125.
- [11] Skogestad S. and Postlethwaite I., *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 2005.
- [12] Vaes D., Swevers J., Sas P., "Optimal decoupling for MIMO-controller design with robust performance," in Proc. American Control Conference, Boston, 2004, pp. 4601-4606.

باعث بهبود عملکرد ترکینگ (ردیابی) شده و در همین شرایط می توان مقایسه داشت که تلاش کنترلی کمتری نسبت به زمانی که بهره کنترل کننده ها ثابت است خواهیم داشت. شکل (4) نشان دهنده ی شبیه سازی انجام شده در حوزه زمان در این بخش است که با استفاده از مشخصات پارامتری پارامتر متغیر خطی انجام شده است.



شکل (4): تغییرات پارامتر  $p(t)$  با زمان

## 6- نتیجه گیری

این مقاله ارائه دهنده یک روش دکوپله سازی در شرایط حضور غیرخطی ها و تغییرات شرایط عملکرد در سیستم های چند متغیره است. روش طراحی پیشنهادی برای این گونه سیستم ها با استفاده از یک روش 2 مرحله ای است. ابتدا برای کاهش تداخل میان مجموعه ورودی ها و خروجی ها، ما از تحولات پارامتر وابسته و تطبیق لحظه ای استفاده می کنیم و سپس برای این سیستم دکوپله شده، کنترل کننده های تک ورودی تک خروجی را طراحی می کنیم (کنترل کننده های با بهره های ثابت یا تطبیق شونده). این یک روش توسعه یافته از نتایج طراحی استاندارد دکوپله سازی موجود در متون کنترلی، مربوط به حالت پارامتر متغیر خطی است. پایداری سیستم پارامتر متغیر خطی را بعد از طراحی و آنالیز عملکرد مربوطه، می توان برای سیستم های حلقه بسته جهت اعتبار سنجی طراحی، انجام و رفتارشناسی کرد. همچنین این مقاله یک اندازه گیری جدید برای میزان تداخل را در ارتباط با تکنیک دکوپله سازی پارامتر متغیر خطی پیشنهادی که می تواند برای طراحی کنترل کننده های تطبیقی استفاده شود، ارائه می دهد.